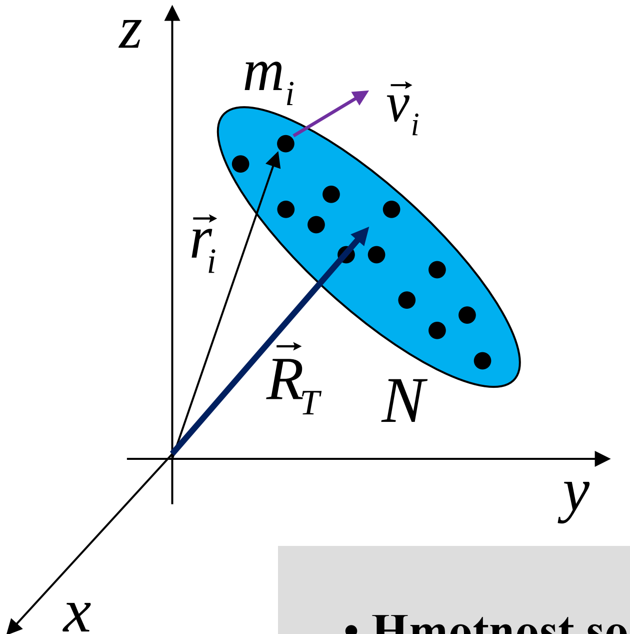
Soustava hmotných bodů



- Soustava N částic,
  např. molekuly plynu v uzavřené nádobě
- Poloha i-tého bodu: $\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$
- Rychlost, hybnost i-tého bodu: $\vec{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$
- Zrychlení i-tého bodu: $\vec{a}_i = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$

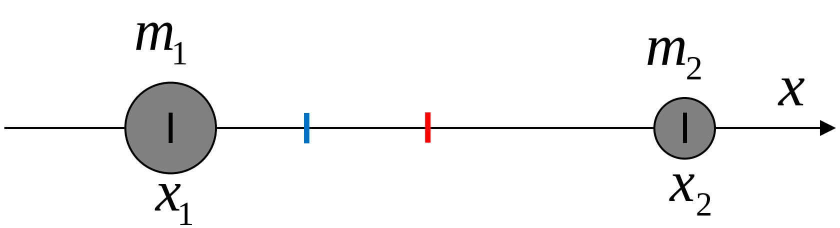
- **Hmotnost soustavy hmotných bodů:** $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- **Hmotný střed (těžiště):** $\vec{R}_T \equiv \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$

$$X_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad Z_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Soustava hmotných bodů - hmotný střed dvou hmotných bodů

- **hmotný střed** $$\vec{R}_T = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$X_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad X_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- **Země-Měsíc:**

m_1 = 5.97 × 10^{24} kg
m_2 = 7.35 × 10^{22} kg = 0.0123 m_1

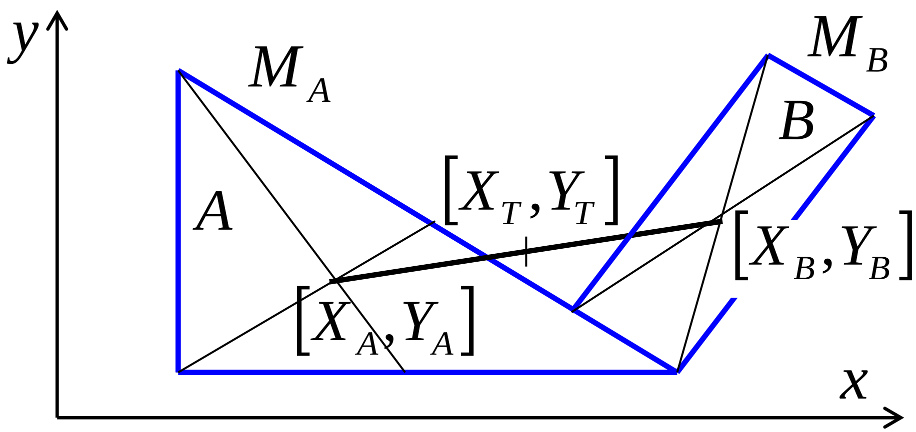
střední vzdálenost Země – Měsíc:
x_2=394 × 10^3 km (vzdálenost středů)

X_T =(0 + 0.0123 × 394 × 10^3) / 1.0123 = 4880 km

X_T je ~1500 km pod povrchem Země

Soustava hmotných bodů - hmotný střed soustavy těles

- **hmotný střed** $\vec{R}_T = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$



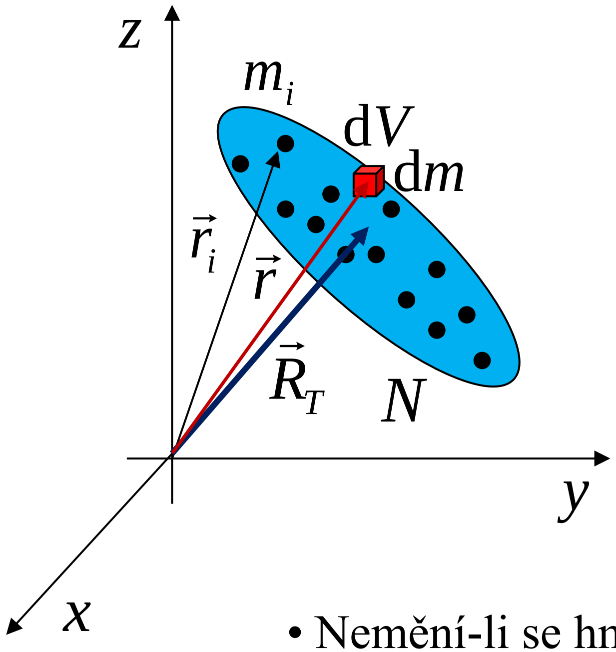
$$X_A = \frac{1}{M_A}\sum_A m_i x_i, \quad Y_A = \frac{1}{M_A}\sum_A m_i y_i$$

$$X_B = \frac{1}{M_B}\sum_B m_i x_i, \quad Y_B = \frac{1}{M_B}\sum_B m_i y_i$$

$$MX_T = \sum_{A+B} m_i x_i = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B \Rightarrow X_T = \frac{M_A X_A + M_B X_B}{M}$$

$$MY_T = \sum_{A+B} m_i y_i = \sum_A m_i y_i + \sum_B m_i y_i = M_A Y_A + M_B Y_B \Rightarrow Y_T = \frac{M_A Y_A + M_B Y_B}{M}$$

Soustava hmotných bodů – volná vs tuhá, diskrétní vs spojitá



- Volná soustava hmotných bodů. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné 3N souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má **3N stupňů volnosti.**

- Tuhá soustava hmotných bodů. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = konst., \quad \rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{m}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

$$X_T \equiv \frac{1}{M}\int_V x\rho \,\mathrm{d}V, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M}\int_V y\rho \,\mathrm{d}V, \quad Z_T = \frac{1}{M}\int_V z\rho \,\mathrm{d}V$$

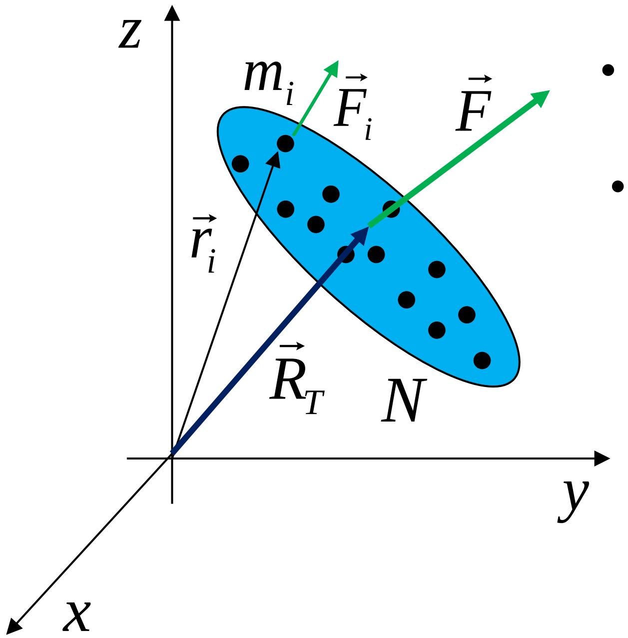
- Nemění-li se hmotnosti jednotlivých hmotných bodů s časem, potom **rychlost hmotného středu soustavy**:

$$\vec{v}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i) = \right]\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{v}_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

- Pro **celkovou hybnost soustavy hmotných bodů**:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = M\vec{v}_T$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Síla působící na i-tý hmotný bod : $\vec{F}_i$

- Sílu která nám působí na i-tý hmotný bod si můžeme představit složenou ze dvou výslednic:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \vec{F}_i^{\,I}$$

výslednice **vnějších sil** působících na *i*-tý bod

vnitřní síly, kterými působí všechny hmotné body soustavy na *i*-tý bod

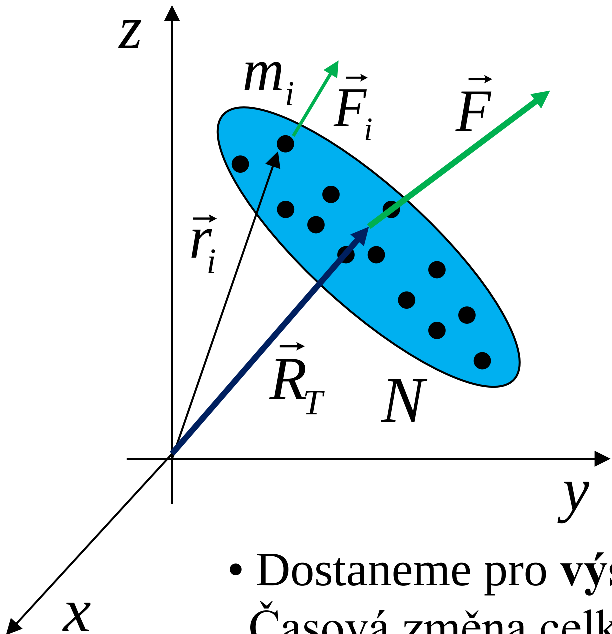
- Pro výslednici vnitřních sil platí:

$$\vec{F}_i^{\,I} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,I}, \quad \vec{F}_{ii}^{\,I} = 0$$

- Podle 2. Newtonova zákona je **výsledná síla** působící na soustavu:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \vec{F}_i^{\,E} + \sum_i^N \sum_j^N \vec{F}_{ij}^{\,I} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Podle 3. Newtonova zákona platí:

$$\vec{F}_{ij}^{\,I} = -\vec{F}_{ji}^{\,I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,i} = 0$$

- Uvážíme-li:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

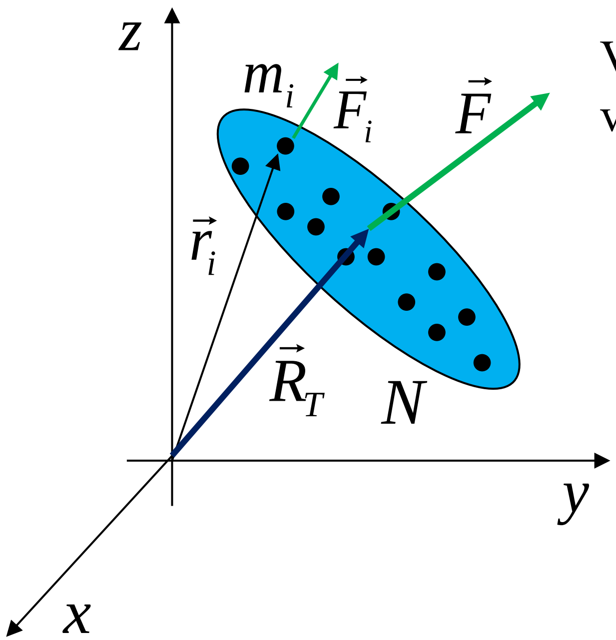
- Dostaneme pro **výslednou síla** působící na soustavu tzv. **1. větu impulzovou**: „Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná výslednici vnějších sil působících na soustavu a má s ní stejný směr.“

$$\vec{F} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i^{\,E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_T}{\mathrm{d}t^2}$$

- Pro konečný časový interval (t_1, t_2) dostaneme integrací:

$$\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



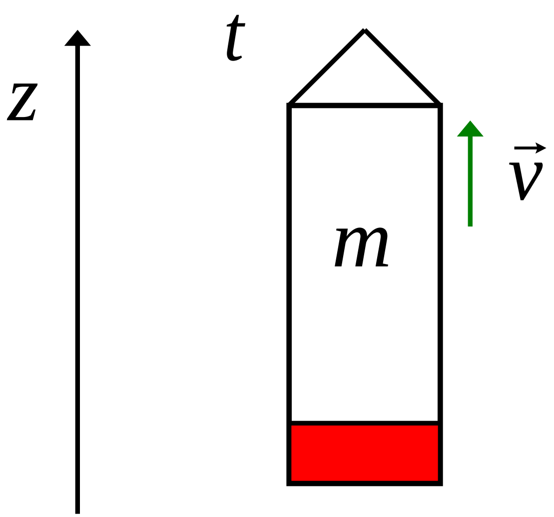
V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i^{\,E} = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{v}_T = konst.$$

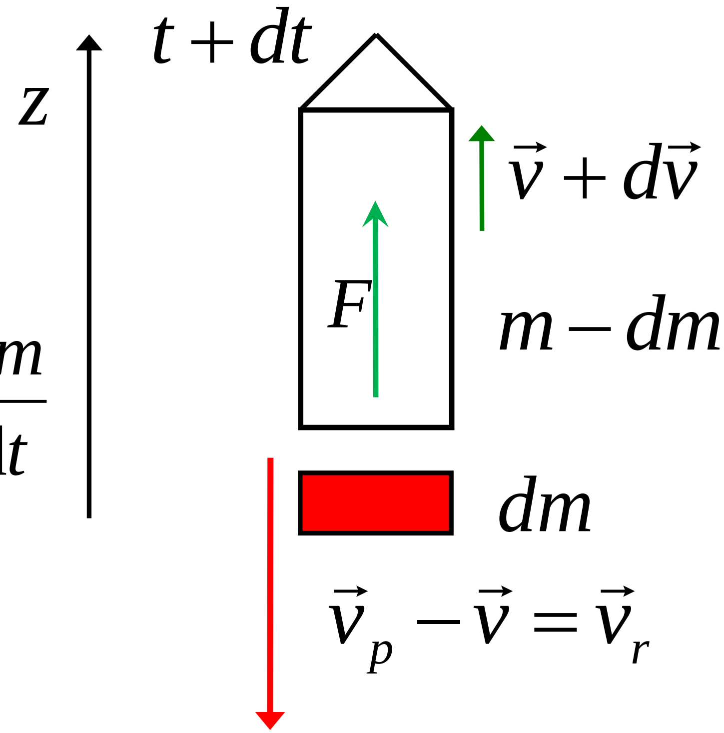
- **Zákon zachování hybnosti:**

„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

Pohyb rakety



$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{v}_r\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$



$$\vec{v}_p - \vec{v} = \vec{v}_r$$

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

zanedbáme

$$0 = m\mathrm{d}\vec{v} + \mathrm{d}m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}_r\mathrm{d}m$$

$$\vec{P} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{v}_p$$

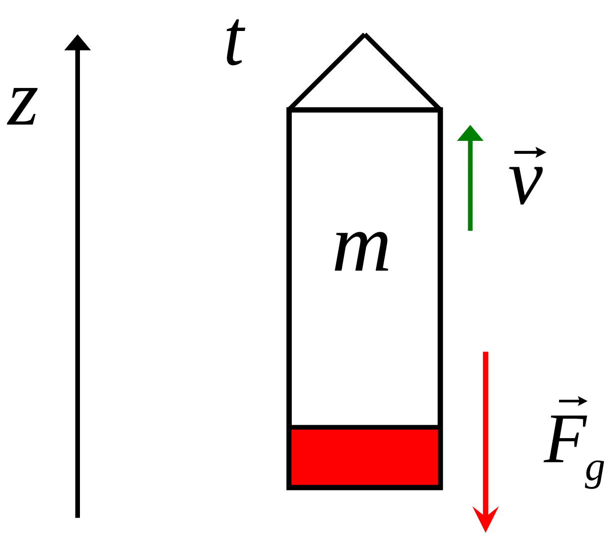
$$\mathrm{d}v = -v_r\,\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

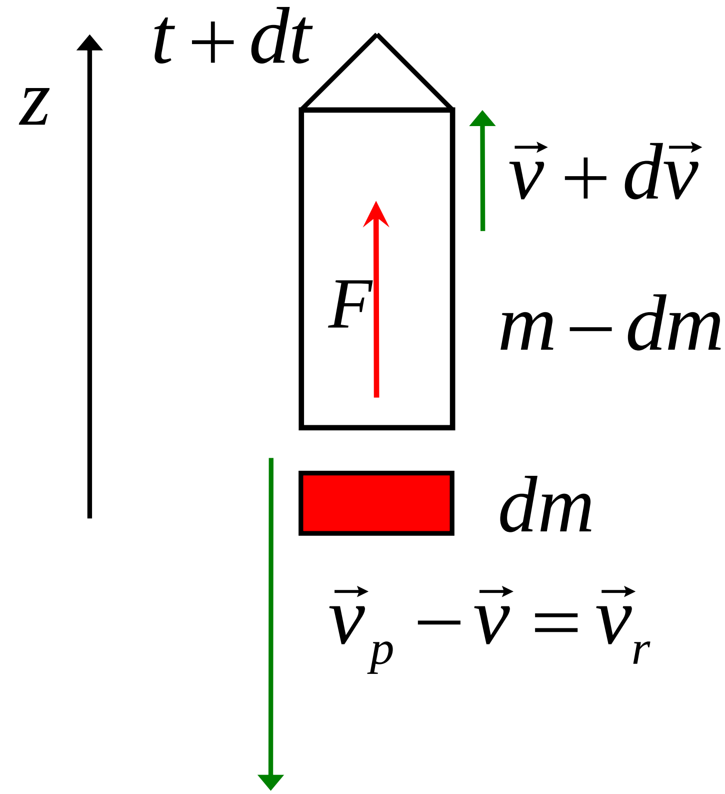
$$m(0) = m_0, \quad v(0) = 0$$

$$\boxed{v(\tau) = v_r \ln\frac{m_0}{m(\tau)}}$$

Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety v tíhovém poli





$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\vec{v}_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}_g$$

$$\mathrm{d}v+g=-v_r\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$m(0)=m_0,\quad v(0)=0$$

$$v(\tau)=v_r\ln\frac{m_0}{m(\tau)}-g\tau$$

Pohyb rakety

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)}$$

Ciolkovského rovnice

Příklad: **jednostupňová raketa**, bez gravitace

v_r = 4.5 km s^{-1}

$v(\tau)$ = 9.7 km s^{-1}

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 1 - \exp\left(-\frac{v(\tau)}{v_r}\right)$$

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 88.4\ \%$$ tvoří palivo

11.6 % zbývá pro váhu rakety a náklad

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)} - g\tau$$

Příklad: **jednostupňová raketa**, start z povrchu Země

v_r = 4.5 km s^{-1} τ = 2 min

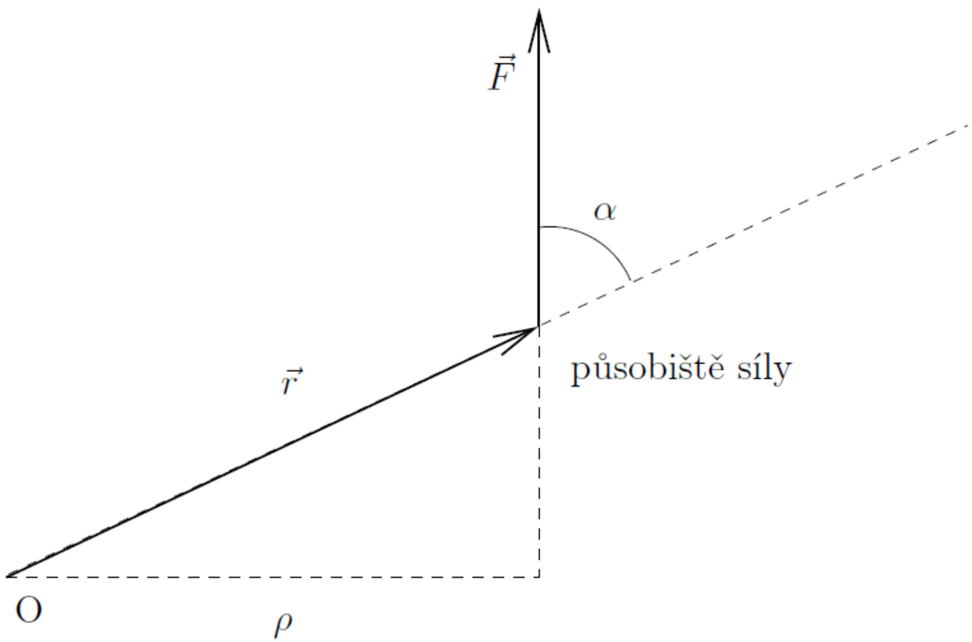
$v(\tau)$= 9.7 – 1.2 = 8.5 km s^{-1}

Pokud bych chtěl dosáhnout rychlosti 9.7 km s^{-1} musím mít palivo jako na dosažení rychlosti $v(\tau)$= 9.7 + 1.2 = 10.9 km s^{-1} bez gravitace

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 91.1\ \%$$ tvoří palivo

8.9 % zbývá pro náklad rakety

Opakování - moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

Moment síly:

$$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Jeho velikost je rovna: $M = rF \sin\alpha = F\rho$

Moment hybnosti:

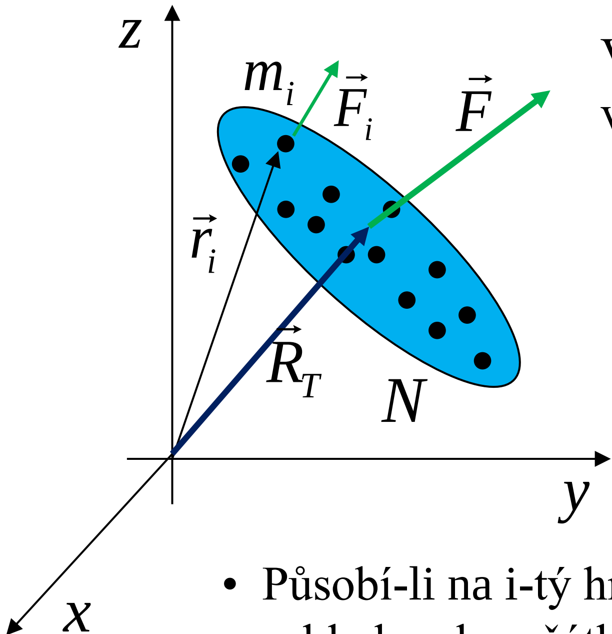
$$\vec{b} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

$$\left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = m\left(\left[\vec{v} \times \vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]\right) = \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{v}_T = konst.$$

- **Zákon zachování hybnosti:**

„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

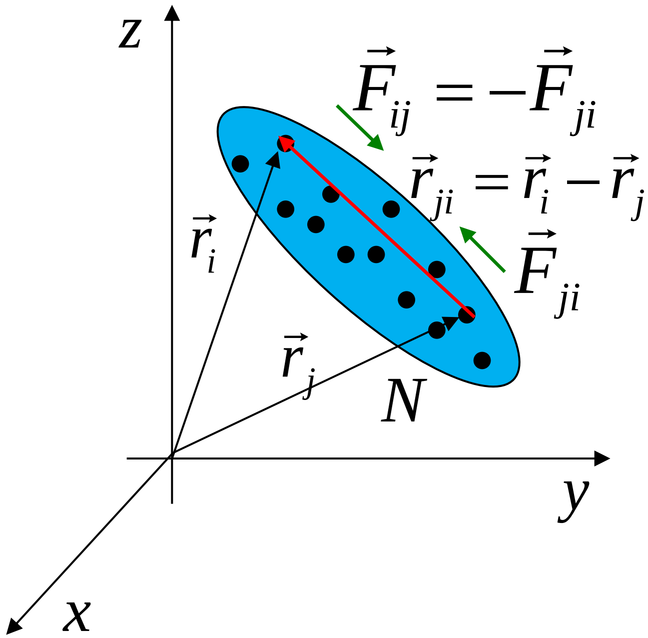
- Působí-li na i-tý hmotný bod síla $\vec{F}_i$ pak moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadné je:

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

- Pro celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i \times \vec{F}\right]_i = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E\right)\right] = \vec{M}^I + \vec{M}^E$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro moment vnitřních sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M}^I = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right]$$

- Uděláme trik:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] + \left[\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \right)$$

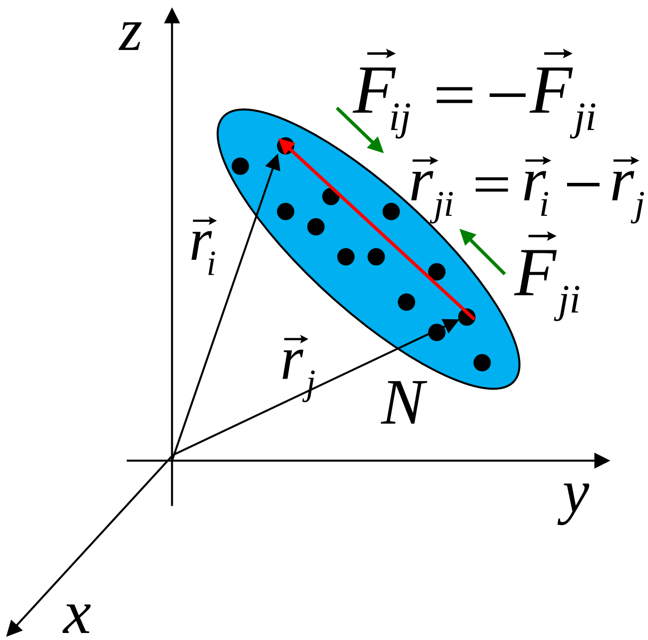
- A pro moment vnitřních sil dostaneme:

$$\vec{M}^I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij} \right] = 0, \quad \textit{protože} \quad \vec{r}_{ji} \,//\, \vec{F}_{ij}$$

- Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je tedy roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\vec{M} = \vec{M}^E = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E \right]$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro i-tý hmotný bod tedy platí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right] = M_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

- Pro celou soustavu posčítáme přes všechny hmotné body:

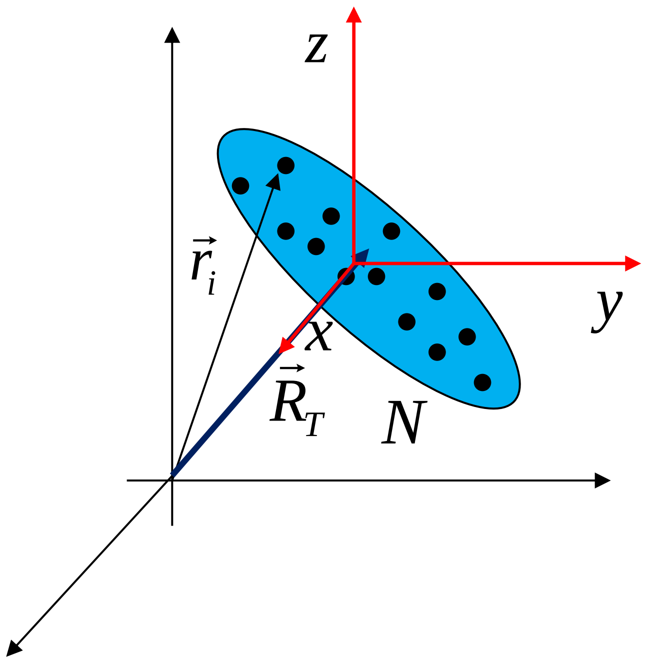
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} \vec{b}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{M}$$

- Dostaneme **2. větu impulzovou**: $$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

„Součet momentů vnějších sil působících na jednotlivé hmotné body soustavy je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.“

- Integrací můžeme upravit na tvar: $$\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$$

Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



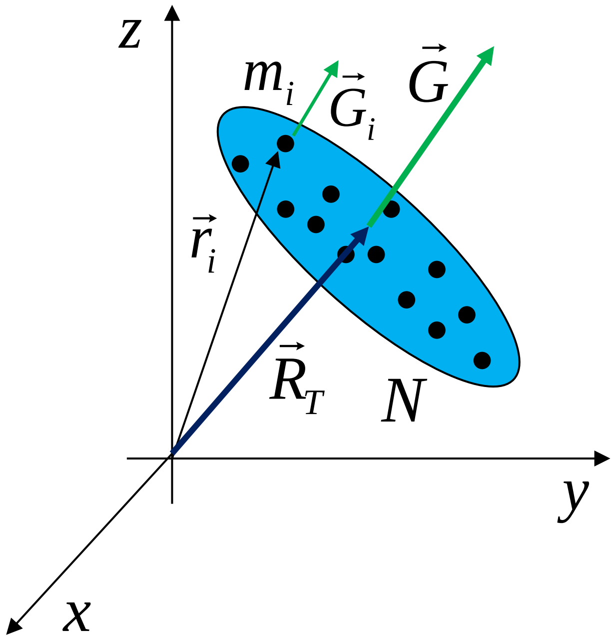
- Když za počátek soustavy souřadné zvolíme hmotný střed (těžiště) soustavy:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_T = 0$$

- dá se ukázat, že 2. věta impulzová platí i pokud vztahujeme moment hybnoti a moment síly vůči hmotnému středu soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}_s}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_s$$

Soustava hmotných bodů – Těžiště



• Hmotný střed bývá ekvivalentně nazýván **těžištěm**.
Tento název je odvozen z působení homogenního tíhového pole na soustavu:

$$\vec{F} = \vec{F}^{E} = \sum_{i}^{N} \vec{G}_i = \sum_{i}^{N} m_i \vec{g}$$

• Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je tedy roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\vec{M} = \vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{g}\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g}\right]$$

• Uvážíme-li definici hmotného středu:

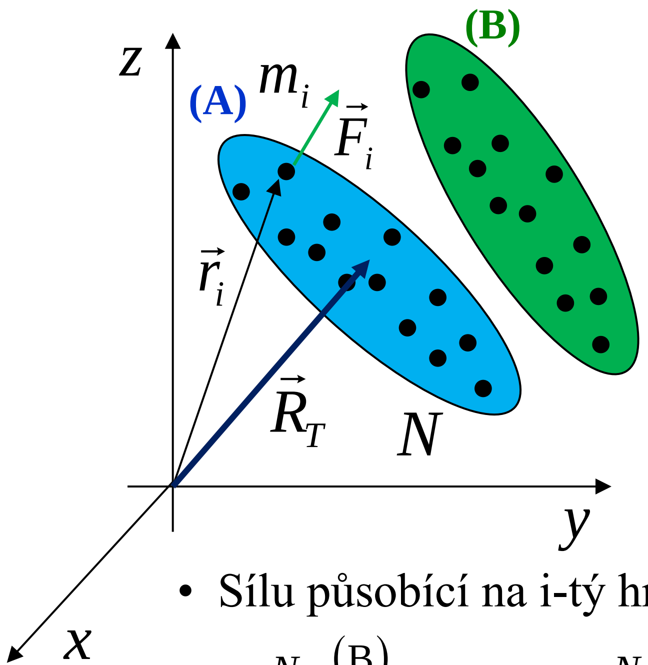
$$\vec{R}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

• Výsledný moment homogenní tíhové síly působící na soustavu hmotných bodů je roven:

$$\vec{M} = \left[M \vec{R}_T \times \vec{g}\right] = \left[\vec{R}_T \times M \vec{g}\right] = \left[\vec{R}_T \times \vec{G}\right]$$

• Hmotný střed - **těžiště** je působištěm homogenní tíhové síly.

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



- Předpokládejme, že soustava hmotných bodů přejde v důsledku působení sil z počátečního stavu **(A)** do konečného stavu **(B)**. Potom práce silového pole při takovém posuvu hmotných bodů je:

$$A = A_{\mathrm{BA}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{r}_i = E_K^{(\mathrm{B})} - E_K^{(\mathrm{A})} = \Delta E_K$$

- kde kinetickou energií se rozumí součet kinetických energií hmotných bodů soustavy :

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Sílu působící na i-tý hmotný bod můžeme rozdělit na výslednici vnitřních a vnějších sil:

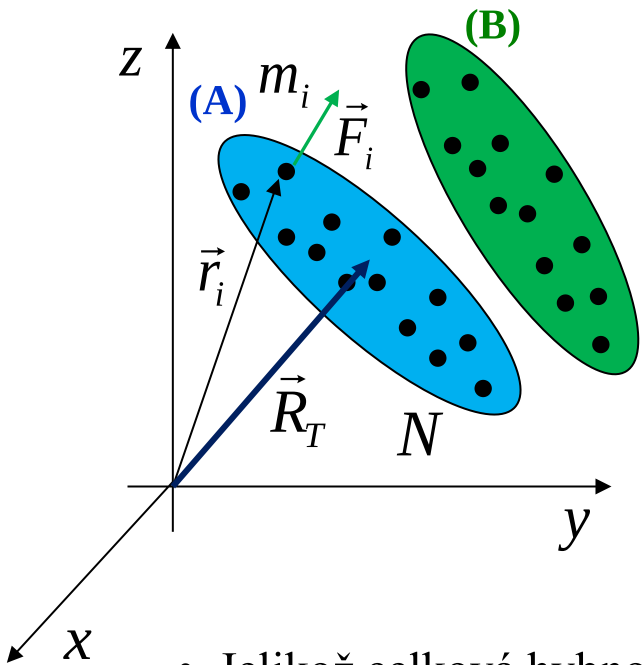
$$A = \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,I} \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,E} \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_{ij} \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,E} \mathrm{d}\vec{r}_i = A^I + A^E$$

- Změna kinetické energie soustavy hmotných bodů je tedy rovna práci vykonané vnitřními a vnějšími silami:

$$\Delta E_K = E_K^{(\mathrm{B})} - E_K^{(\mathrm{A})} = A^I + A^E$$

- Kinetickou energii soustavy hmotných bodů ovlivňují jak vnější, tak vnitřní síly. Vnitřní síly ovlivňují ale jen volnou soustavu, protože v tuhé soustavě se vzdálenosti mezi hmotnými body nemění a vnitřní síly tedy nekonají práci.

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



- Pro rychlost i-tého hmotného bodu vůči hmotnému středu (těžišti) soustavy platí (Galileova transformace):

$$\vec{v}_{iT} = \vec{v}_i - \vec{v}_T$$

- kinetickou energii hmotných bodů soustavy můžeme upravit:

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_T + \vec{v}_{iT}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} v_T^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{v}_T \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{iT} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{iT}^2$$

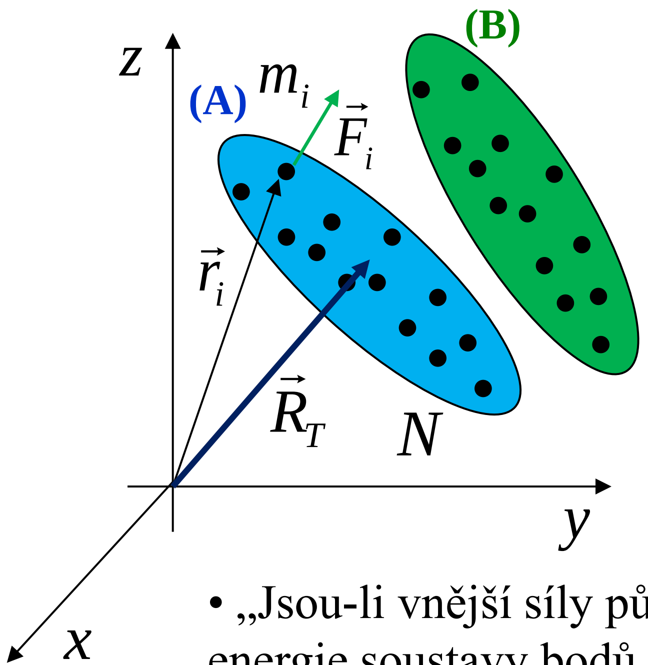
- Jelikož celková hybnost hmotných bodů je vůči hmotnému středu (těžišti) nulová, tak:

$$E_K = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{iT}^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + E_K^I$$

- Kinetickou energii pohybu hmotných bodů soustavy vůči jejímu hmotnému středu nazýváme **vnitřní kinetickou energií** soustavy hmotných bodů.

„Celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie hmotného středu a vnitřní kinetické energie soustavy“ – **Königova věta**

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



- Jsou-li vnější i vnitřní síly působící na soustavu konzervativní, je práci *A* vykonanou na systém možno vyjádřit jako úbytek potenciální energie mezi místy **(A)** a **(B)**:

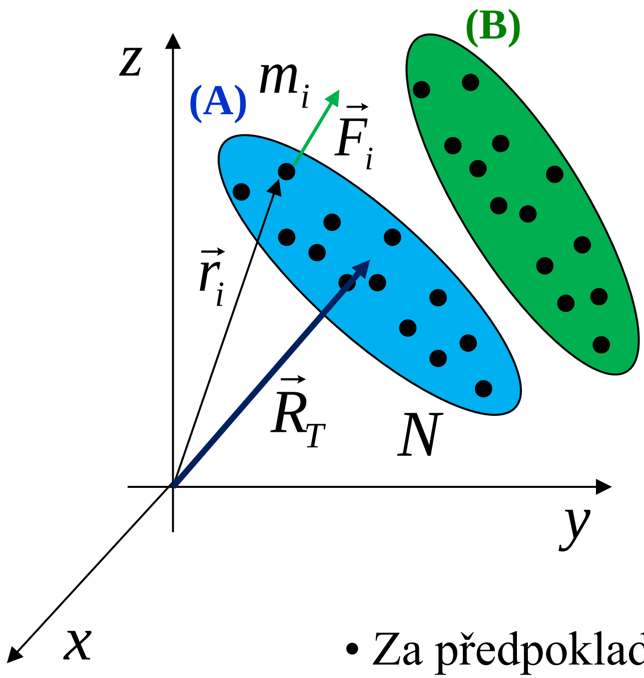
$$A = A_{\mathrm{BA}} = E_P^{(\mathrm{A})} - E_P^{(\mathrm{B})}$$

- a pro celkovou mechanickou energii soustavy hmotných bodů dostaneme **zákon zachování mechanické energie**:

$$E = E_K^{(\mathrm{A})} + E_P^{(\mathrm{A})} = E_K^{(\mathrm{B})} + E_P^{(\mathrm{B})} = konst.$$

- „Jsou-li vnější síly působící na těleso konzervativní, je součet potenciální a kinetické energie soustavy bodů konstantní. “

Izolovaná soustava hmotných bodů



- **Izolovanou soustavou hmotných bodů** rozumíme takovou soustavu, která není vystavena působení externích sil:

$$F_i^E = 0$$

- V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové dostáváme **zákon zachování hybnosti**:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{v}_T = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = konst.$$

- Za předpokladu, že se hmotnost soustavy hmotných bodů nemění dostaneme:

$$\vec{v}_T = konst.$$

- Za předpokladu, že je celkový moment sil působících na soustavu nulový, dostáváme z 2. věty impulzové **zákon zachování momentu hybnosti**:

$$\vec{M} = \sum_i^N \vec{M}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{b}_i = konst.$$